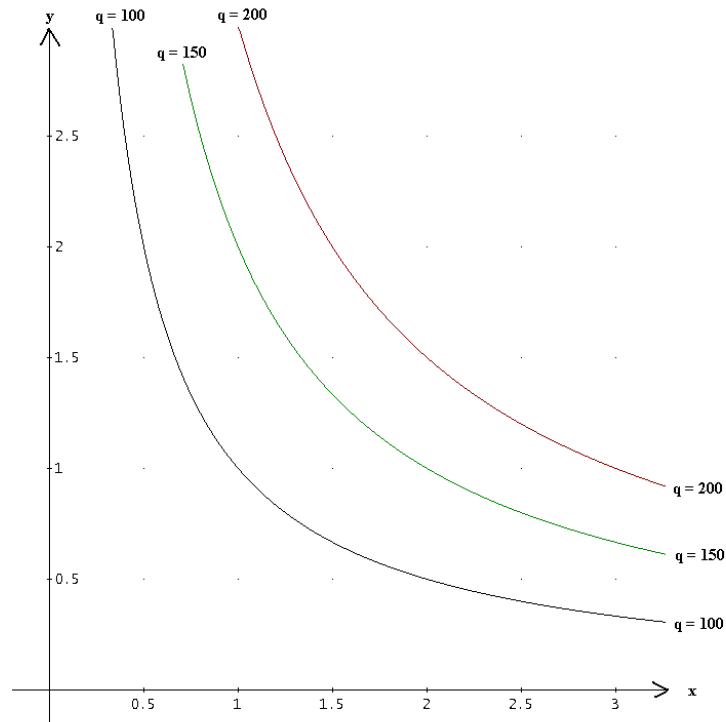


Facit EK GK 2010 02 17**Peter Lohmander**

Fråga 5.

**Figur 1.**

q = produktionsvolym av produkt "QPRODUKT" som Du säljer på marknaden.

x = mängden av insatsvara "XVARA".

y = mängden av insatsvara "YVARA".

Använd informationen i Figur 1. och lös följande problem:

Du vill producera 100 enheter av "QPRODUKT" så billigt som möjligt. Du kan köpa de insatsvaror som Du behöver på marknaden för priserna "XPRIS" per enhet av "XVARA" respektive "YPRIS" per enhet av "YVARA".

$XPRIS = 50$ SEK och $YPRIS = 75$ SEK.

Bestäm hur mycket Du bör köpa av XVARA samt hur mycket Du bör köpa av YVARA!

Det räcker inte med att endast ange svaret. Den metod som Du använde för att lösa problemet måste fullständigt beskrivas. Du måste också tydligt visa exakt hur Du använde informationen i Figur 1. för att lösa detta problem. (4p)

Fråga 6. Du har ett (lokalt) monopol som säljer saft vid ingången till en nationalpark i USA. Du vet mycket väl att det pris som Du tar för saften, per glas, påverkar hur många glas som Du kan sälja per dag. Lika många besökare kommer till nationalparken varje dag, eftersom mängden besökare är hårt reglerad och känd i förväg. Besökarna måste anmäla sina kommande besök med mycket lång framförhållning.

Du har testat hur det ligger till under några dagar, genom att sätta olika priser och se hur mycket Du får sälja. Du har sedan konstruerat Tabell 1.

Tabell 1.

Pris per glas	\$ 2	\$ 4	\$ 6	\$ 8
Antal sålda glas	200	160	120	80

Du har inga fasta kostnader för Din verksamhet.

Du kan få fram hur mycket saft som helst till Ditt försäljningsställe om Du vill. Du har inga fysiska begränsningar alls i verksamheten. Din marginalkostnad per glas saft, inklusive diskning och liknande, är \$ 1.

Uppgifter:

- Fastställ den linjära funktion som beskriver sambandet mellan pris, P , och antal sålda glas, Q . (1p)
- Ställ upp den funktion som beskriver hur Din vinst per dag, "VINST", beror av antalet sålda glas per dag, Q . (1p)
- Räkna ut exakt hur många glas per dag som Du bör sälja för att maximera vinsten. (1p)
- Räkna ut exakt vilket pris Du bör ta per glas för att maximera vinsten. (1p)

Facit 5.

Du vill producera 100 enheter av "QPRODUKT" så billigt som möjligt. Du kan köpa de insatsvaror som Du behöver på marknaden för priserna "XPRIS" per enhet av "XVARA" respektive "YPRIS" per enhet av "YVARA".

XPRIS = 50 SEK och YPRIS = 75 SEK.

Bestäm hur mycket Du bör köpa av XVARA samt hur mycket Du bör köpa av YVARA!

Hur många "XVARA" och "YVARA" kan vi köpa in för en viss kostnad, K?

Nedan visas hur detta samband ser ut. Om vi accepterar kostnaden K så

kan vi byta ut y mot x så länge som den totala kostnaden K inte förändras, d.v.s. $dK = 0$.

$dK = 0$ innebär att vi får ett visst värde på derivatan dy/dx , nämligen $-2/3$.

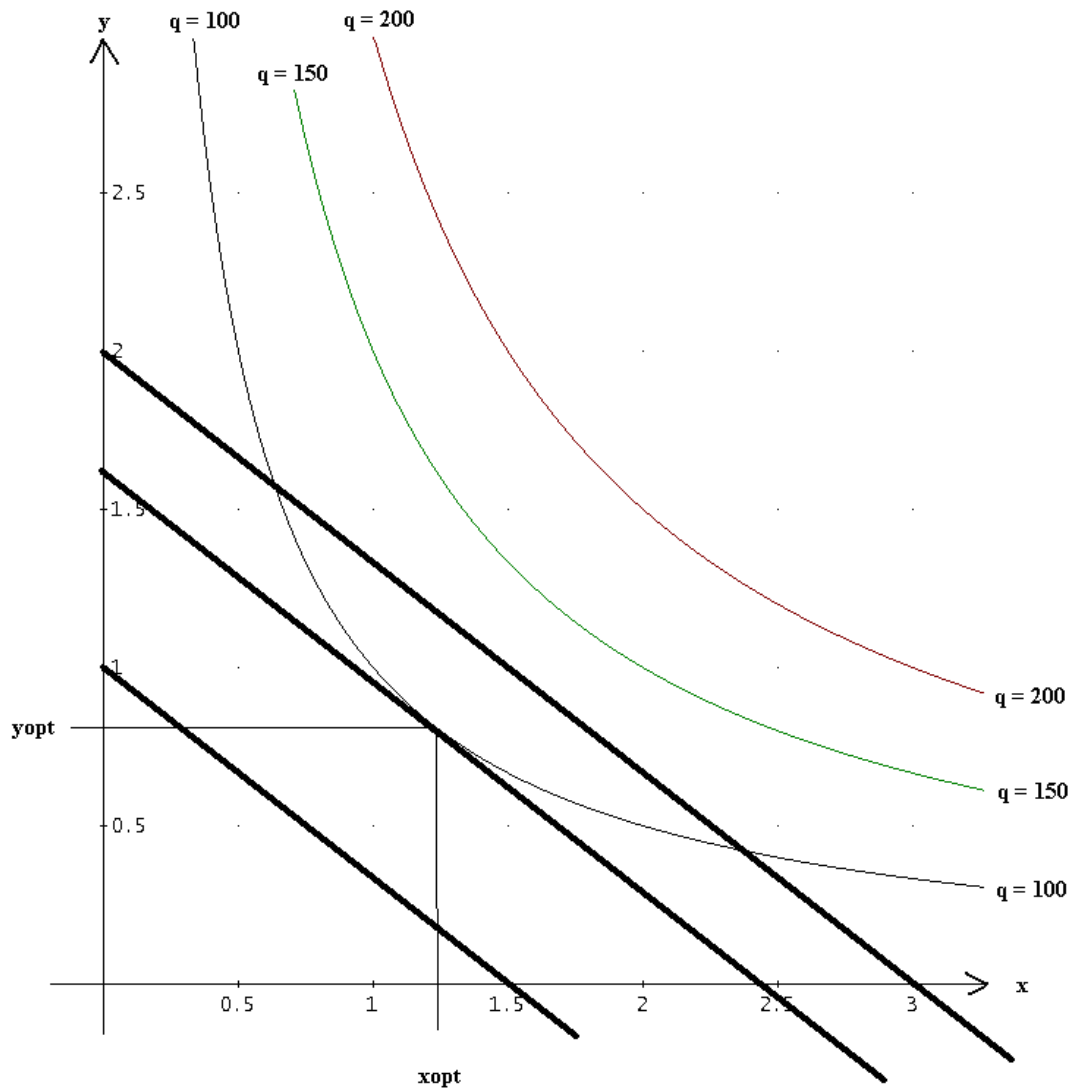
$$K = 50x + 75y$$

$$dK = 50dx + 75dy = 0$$

$$75dy = -50dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{50}{75} = -\frac{2}{3} \approx -0.666667$$

Vi vill nu hitta den punkt på nivåkurvan $q(x,y) = 100$ som tangerar den kostnadslinje som representerar lägst kostnad K. Vi ritar därför in parallella kostnadslinjer vilka alla har derivatan $dy/dx = -2/3$ och kontrollerar resultatet.



Figur 5.1.

De parallella linjerna ska alla ha lutningen $-2/3$.

Figuren visar att Du bör köpa in följande (avrundade värden):

$x = 1.2$ (Med tre decimaler får vi $x = 1.225$)

$y = 0.8$ (Med tre decimaler får vi $y = 0.817$)

Facit 6.

Tabell 1.

Pris per glas	\$ 2	\$ 4	\$ 6	\$ 8
Antal sålda glas	200	160	120	80

Din marginalkostnad per glas saft, inklusive diskning och liknande, är \$ 1.

Uppgifter:

- a. Fastställ den linjära funktion som beskriver sambandet mellan pris, P , och antal sålda glas, Q . (1p)

$$P = a + bQ$$

$$a + bQ = P$$

$$a + b \cdot 80 = 8$$

$$a + b \cdot 200 = 2$$

$$a + 80b = 8$$

$$a + 200b = 2$$

$$a = 8 - 80b$$

$$a = 2 - 200b$$

$$8 - 80b = 2 - 200b$$

$$120b = -6$$

$$b = \frac{-6}{120} = -\frac{1}{20} = -0.05$$

$$a = 8 - 80b$$

$$a = 8 - 80\left(-\frac{1}{20}\right)$$

$$a = 8 + 4$$

$$a = 12$$

Funktionen blir därför:

$$P = 12 - \frac{1}{20}Q \quad (\$)$$

Vi testar den funktionen för samtliga värden i Tabell 1. och konstaterar att den stämmer.

Pris per glas	\$ 2	\$ 4	\$ 6	\$ 8
Antal sålda glas	200	160	120	80
Funktionen P	12-10=2	12-8=4	12-6=6	12-4=8

- b. Ställ upp den funktion som beskriver hur Din vinst per dag, "VINST", beror av antalet sålda glas per dag, Q. (1p)

$$\pi = (\text{VINST}) = P(Q)Q - 1Q$$

$$\pi = P(Q)Q - Q$$

$$\pi = \left(12 - \frac{1}{20}Q\right)Q - Q$$

$$\pi = 11Q - \frac{1}{20}Q^2$$

$$\pi = 11Q - \frac{1}{20}Q^2 \quad (\$)$$

- c. Räkna ut exakt hur många glas per dag som Du bör sälja för att maximera vinsten. (1p)

$$\frac{d\pi}{dQ} = 11 - 0.1Q$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = 11 - 0.1Q = 0$$

$$0.1Q = 11$$

$$Q = \frac{11}{0.1} = 110$$

Andraordningsvillkoret visar att vi får ett unikt maximum när förstaderivatan är noll.

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -0.1 < 0$$

$$Q = 110$$

- d. Räkna ut exakt vilket pris Du bör ta per glas för att maximera vinsten. (1p)

$$P = 12 - \frac{1}{20}Q$$

$$P = 12 - \frac{1}{20}(110)$$

$$P = 12 - 5.5$$

$$P = 6.5$$

$$P = \$6.5$$

Beräkning av den optimala vinsten (ej en uppgift)

$$\pi = 11Q - \frac{1}{20}Q^2$$

$$\pi = 11(110) - \frac{1}{20}(110)^2$$

$$\pi = 605$$

$$\pi = \$605$$