



**KUNGL
KRIGSVETENSKAPS-
AKADEMIENS
Handlingar och Tidskrift
NR 2/2019**

Publicerad sedan 1797

**THE ROYAL
SWEDISH ACADEMY
OF WAR SCIENCES
Proceedings and Journal
NR 2/2019**

Published since 1797

Fyra centrala militära beslutsproblem

Generella metoder och lösningar

av Peter Lohmander

Résumé

In this paper, four military decision problems, common and relevant to typical army and ranger units, at platoon, company and battalion levels, are described and analysed. It is found that fundamental game theory and methods can be used to determine optimal decisions. The optimal decisions are derived as mixed strategy Nash equilibria, via manual methods. It is found that considerable improvements of the expected outcomes of typical decisions can be obtained in a way that does not require high investment costs. It is argued that the methodology to some degree should be included in the education of all Swedish military officers, in particular in the army and ranger units intended for special operations.

I DENNA ARTIKEL ska vi analysera och diskutera fyra exempel på centrala militära beslutsproblem vilka är typiska och viktiga vid många slags lägre förband, särskilt inom armé- och jägarförband vilka mer eller mindre självständigt arbetar bakom fiendens linjer.

De fyra beslutsproblemen är dessa:

- I Vägval vid uppmarsch och underhållstransporter
- II Val av plats för eldöverfall vid fördröjningsstrid
- III Positionering av bevaknings- och stridspatruller vid stabsplats
- IV Val av utgångsgruppering för spaning mot, och störande av, fientlig stabsplats

Författaren har grundligt kommit i kontakt med de aktuella beslutsproblemen och deras reglementerade genomförande under den egna utbildningen till officer och jägarplutonchef vid Norrlands dragoner, K4 (i dag Arméns Jägarbataljon). Senare har författaren i olika befattningar, bland annat som kommandant i en högre stab samt som stabschef i en hemvärnsbataljon, funnit

att de fyra presenterade beslutsproblemen är mycket vanliga och viktiga inom många olika slags förband. I de praktiska militära verksamheterna tillämpas dock vanligen ej de teorier och metoder som kan bevisas vara nödvändiga för att bästa möjliga beslut ska väljas. Det är uppenbart att varje militär organisation bör sträva efter bästa möjliga förväntade resultat. Ibland kan ett delmål vara att erhålla så låga egna förluster som möjligt och ibland är maximal verkan i målet det centrala.

Författaren har i den civila verksamheten, varav femton år som professor, forskat och utbildat inom operationsanalys inklusive spelteori samt även medverkat i flera internationella operationsanalyskonferenser med såväl militära som civila tillämpningar och sessioner. En mycket omfattande internationell vetenskaplig litteratur existerar inom detta område. I många länder är operationsanalys med spelteori och militära tillämpningsexempel en central del av den militära utbildningen. Det bör även i Sverige vara möjligt att med förhållandevis enkla insatser expandera detta utbildningsområde.

Denna text innehåller som nämnts fyra centrala militära beslutsproblem i tämligen generell form. Vi kommer att finna att en och samma teori och metodik kan och bör användas för att ge konkreta förslag till beslut i samtliga dessa fall. Om vi av något skäl väljer att inte använda dessa teorier och metoder så kommer vi att uppnå sämre förväntade resultat och göra större förväntade förluster än vad som är nödvändigt. Den som inte väljer att använda dessa teorier och metoder bör därför ange mycket starka och relevanta skäl för detta. Det finns på många håll en fullt begriplig skepsis mot avancerade beräkningar inom militärt beslutsfattande. En orsak är att de relevanta teorierna och metoderna ofta tidigare har presenterats på ett sätt som krävt onödigt avancerade förkunskaper, vilka ofta saknats. Det kommer emellertid nu att bli helt klart för läsaren att tämligen enkla resonemang och beräkningar är det enda som krävs för att uppnå högst påtagliga förbättringar inom det militära beslutsfattandet.

Militära beslutsproblem karaktäriseras av att en beslutsfattare, hädanefter benämnd "Blå", har minst en motståndare, kallad "Röd". Vi ska i denna text avgränsa oss till fallet med en och endast en motståndare. I de typiska militära beslutsproblem som vi tar upp i denna text har Blå och Röd helt skilda intressen. Det finns en generell teori för detta slags problem, nämligen "Two Person Zero Sum Games", TPZSG. Man kan i vissa fall vara intresserad av att generalisera problematiken på olika sätt, vilket vanligen leder till mycket mer omfattande beräkningar. Vi ska i denna text inte bry oss om sådana utvecklingar, eftersom de inte är nödvändiga och relevanta i de typiska problem som vi ska analysera.

Även om denna text är problemlösningssfokuserad och vi inte i detalj kommer att beröra de mer avancerade spelteoretiska teorierna,

kan en snabb orientering om fördjupande texter och förklaringar vara motiverad. Spelteori med militära tillämpningar inom marinen, flottan och flyget är mycket väl presenterade av Washburn (1994).¹ Det finns en stor mängd litteratur inom det spelteoretiska området. Luce och Raiffa (1989)² beskriver grundligt en stor del av den centrala spelteoretiska teorin. Några väl läsvärda texter som täcker de tidiga och ännu centrala teorierna och metoderna inom området är: Nash (1950),³ von Neumann (1954),⁴ Drescher (1961)⁵ och Chiang (1974).⁶

Isaacs (1965)⁷ utvecklar dynamiska spel med och utan stokastiska inslag i diskret och kontinuerlig tid. I Braun (1983)⁸ finner man ett mycket väl genomarbetat kapitel "Mathematical theories of war" om deterministiska differentialekvationer för dynamiska krigsspel med många historiska kopplingar, främst från första och andra världskriget. Även generella modeller och optimala beslut gällande olika former av strid, inklusive konventionella metoder och guerillametoder, behandlas med högst övertygande och klara argument och matematiska analyser. En ny metodik för att kunna bestämma optimala beslut i dynamiska spel med stokastiska störningar, som samtidigt gör det möjligt att hantera mycket stora antal beslutsvariabler, har nyligen utvecklats av Lohmander (2018).⁹

Denna text är som framgått problemlösningssfokuserad. Vi kommer därför att först gå igenom ett inledande konkret beslutsproblem, ett specialfall av beslutsproblem I, i detalj. Alternativa sätt att fatta beslut och deras konsekvenser behandlas. Det kommer att entydigt bevisas att man kan förbättra det förväntade resultatet genom att välja sannolikheter för olika handlingsalternativ enligt en av författaren optimerad beslutsregel.

I de därefter fyra följande sektionerna behandlas de fyra typiska beslutsproblemen, I, II, III och IV, grundligt. Fullständiga för-

klaringar ges till hur de relevanta beslutsreglerna fastställs.

Ett inledande konkret beslutsproblem med uppenbar resultatförbättring

Hur bör vi välja bästa möjliga beslut om vi har en motståndare som vill skada oss maximalt? Detta är en typisk fråga som kan besvaras med hjälp av spelteori. Nu ska vi fördjupa oss i ett typiskt beslutsproblem som vi ofta möter i internationella operationer och många andra militära sammanhang.

Förutsättningar och läge

Du är chef för kompani Blå. Du befinner Dig ibland i närheten av stad A och ska flytta kompaniet till stad B. Du känner till att det finns en fientlig styrka Röd i trakten. Röd vill skada Blå maximalt och kan genomföra eldöverfall mot de alternativa vägarna 1 och 2. Du vill givetvis föra kompaniet till B utan större förluster än nödvändigt. Din kompanistab har räknat ut följande: Om Du väljer väg 1 och om Röd har utgångsgrupperat där så får Du räkna med att Blå förlorar 3 lastbilar. Den vägen har flera backkrön och krökar vilket gör det ganska enkelt för Röd att genomföra ett eldöverfall med stor verkan. Om Du väljer väg 2 och Röd har

utgångsgrupperat där så får Du också räkna med förluster, dock något mindre. Staben gör bedömningen att två lastbilar förloras i det läget. Väg 2 är mindre krokig. Du kan hålla högre fart och har bättre sikt. Röd kan inte komma lika nära väg 2 utan att upptäckas från vägen på långt håll. Om Du väljer den ena vägen och Röd utgångsgrupperar vid den andra vägen så genomförs inget eldöverfall och kompani Blå klarar av hela förflyttningen utan förluster.

Överväganden

Några olika handlingsalternativ är möjliga.

Beslut 1

Vi skulle kunna bestämma oss för att alltid välja den väg som är "säkrast" i den meningen att vi får så låg förlust som möjligt om eldöverfallet genomförs där. Detta kan förefalla vara en bra princip. Vad skulle den förväntade förlusten bli i så fall? Jo, då skulle Röd veta att vi alltid väljer denna väg (väg 2) och därför utgångsgruppera där. Vi förväntar då att förlora två lastbilar vid varje förflyttning.

Beslut 2

Vi skulle kunna bestämma oss för att alltid "göra tvärt om" och räkna med att Röd alltid

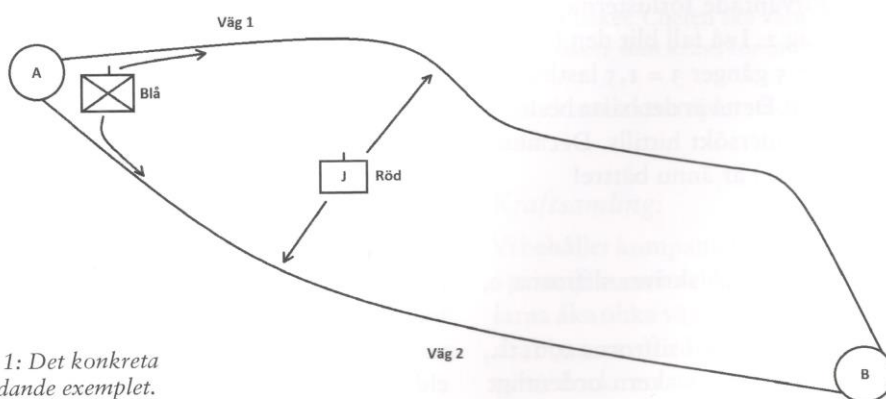


Fig. 1: Det konkreta inledande exemplet.

tror att vi väljer väg 2. Då skulle vi i verkligheten alltid välja väg 1 och helt undvika förluster så länge som Röd låter sig luras. Å andra sidan skulle Röd snart märka att inga förflyttningar äger rum på väg 2 och omgruppera till väg 1. Därefter skulle vi förlora tre lastbilar per förflyttning. Tydligt är Beslut 1 något bättre än Beslut 2 i det långa loppet. Å andra sidan kanske det finns beslut som är ännu bättre?

Beslut 3

Vi kan bestämma oss för att välja väg 1 och väg 2 varannan gång. Problemet är att Röd kan upptäcka alla sådana regelbundenheter och lista ut vilken väg vi väljer nästa gång.

Beslut 4

Vi kan bestämma oss för att kasta tärning alldeles före varje förflyttning. Om vi får 1, 2 eller 3 så väljer vi väg 1. Om vi får 4, 5 eller 6 så väljer vi väg 2. Detta innebär att Röd inte kan förutsäga vilken väg vi kommer att välja nästa gång och därför inte kan förbereda eldöverfallet på "rätt" ställe. Beslut 4 är uppenbarligen bättre för Blå än Beslut 3 även om de har vissa likheter. I bägge fallen väljer vi väg 1 respektive väg 2 lika ofta, nämligen i 50 procent av fallen. Om Röd märker att vi väljer bägge vägarna lika ofta så bör Röd förbereda eldöverfall vid väg 1 eftersom de förväntade förlusterna där är högre än vid väg 2. I så fall blir den förväntade förlusten 0.5 gånger 3 = 1.5 lastbil vid varje förflyttning. Detta är det bästa beslutet av dem vi har undersökt hittills. Det finns dock ett beslut som är ännu bättre!

Beslut 5

Vi behöver 10 kulor. Vi skriver siffrorna 0, 1, ..., 9 på dessa.

Vi lägger tio kulor med siffrorna 0, 1, ..., 9 i baskern. Vi skakar baskern ordentligt

och plockar upp en slumpvis vald kula. Om kulan har nummer 0, 1, 2 eller 3 så väljer vi väg 1. Om kulan har nummer 4, 5, 6, 7, 8 eller 9 så väljer vi väg 2. Vi gör detta alldeles före varje förflyttning. Detta innebär också att Röd inte kan förutsäga vilken väg vi kommer att välja nästa gång och därför inte kan förbereda eldöverfallet på "rätt" ställe. Med andra ord väljer vi väg 1 med sannolikheten 40 procent och väg 2 med sannolikheten 60 procent.

Om Röd utgångsgrupperar vid väg 1 så blir den förväntade förlusten 0.4 gånger 3 = 1.2

Om Röd utgångsgrupperar vid väg 2 så blir den förväntade förlusten 0.6 gånger 2 = 1.2

Uppenbarligen så spelar det ingen roll vid vilken väg som Röd förbereder eldöverfall. Den förväntade förlusten blir 1.2 lastbilar om vi, Blå, väljer väg på detta sätt. Vi konstaterar att Beslut 5 är det mest gynnsamma för vårt kompani Blå. Vår förväntade förlust minskar med 0.3 lastbilar per förflyttning (1.5 minus 1.2 = 0.3) om vi använder rätt procentsatser i relation till om vi använder 50 procents sannolikhet för varje väg. Det är således viktigt, men inte tillräckligt, att vi är oförutsägbara. Vi måste också välja alternativen med rätt sannolikheter.

Slutsatser i det aktuella exemplet

Vi (Blå) bör slumpmässigt välja väg på ett sådant sätt att Röd inte kan räkna ut vilken väg vi kommer att ta och utgångsgruppera för eldöverfall vid den vägen. Vi ska således inte använda ett regelbundet schema eller informera fler än absolut nödvändigt om vägvalet i förväg. Information kan läcka ut till fienden på olika sätt. Det är också viktigt att inte använda samma sannolikheter, exempelvis 50 procent för väg 1 och 50 procent för väg 2. Om vi gör det kan ju fienden räkna ut att det är bättre att utgångsgruppera för eldöverfall vid den väg där störst verkan kan

uppnås. Vi bör välja väg slumpmässigt, med olika sannolikheter för olika vägar, på ett sådant sätt att de förväntade förlusterna vid de olika val som Röd kan göra är lika stora. I det aktuella exemplet innebar detta att vi skulle välja väg 1 med 40 procents sannolikhet och väg 2 med 60 procents sannolikhet.

En generell beslutsregel

I den just beskrivna typen av beslutsproblem kan följande princip bevisas vara optimal:

Om Blå och Röd bägge väljer väg 1 så blir den förväntade förlusten för Blå C_{11} , samt, om Blå och Röd bägge väljer väg 2 så blir den förväntade förlusten för Blå C_{22} .

I så fall bör Blå välja väg 1 med sannolikheten X_1 och väg 2 med sannolikheten X_2 .

$$x_1 = c_{22} / (c_{11} + c_{22})$$

$$x_2 = c_{11} / (c_{11} + c_{22})$$

Om vi använder de aktuella siffrorna i exemplet så får vi de kända resultaten.

$$x_1 = c_{22} / (c_{11} + c_{22}) = 2 / (3 + 2) = 2 / 5 = 40\%$$

$$x_2 = c_{11} / (c_{11} + c_{22}) = 3 / (3 + 2) = 3 / 5 = 60\%$$

När de optimala sannolikheterna räknats ut kan den förväntade förlusten kan räknas ut:

$$E = x_1 c_{11} = x_2 c_{22}$$

$$E = 2 / 5 * 3 = 3 / 5 * 2 = 6 / 5 = 1.2$$

En väg förbättras: Hur bör taktiken ändras och hur mycket kan förlusterna minskas?

Hur bör vi ändra vårt beteende om väg 1 förbättras ordentligt? Kurvorna jämnas ut och snåren närmast vägen rensas bort. Detta innebär att fienden inte vågar utgångsgruppera så nära väg 1 som tidigare. Kompanistaben räknar ut att c_{11} nu ändras från 3 till 1. Vi genomför vår kalkyl en gång till med de nya förutsättningarna:

Nu bör vi välja väg 1 mycket oftare än före förbättringen. Även nu är det dock viktigt att inte alltid välja väg 1. Vi kan nu lägga tre kulor i baskern med nummer 1, 2 och 3. Vi skakar ordentligt. Om vi plockar upp kula 1 eller 2 så väljer vi väg 1. Om kulans nummer är 3 så väljer vi väg 2. Efter vägförbättringen kan vi också kasta tärning. Om tärningen visar 1, 2, 3 eller 4 så väljer vi väg 1. Om tärningen visar 5 eller 6 så väljer vi väg 2. Vad blir den förväntade förlusten efter vägförbättringen?

$$E = 2 / 3 * 1 = 1 / 3 * 2 = 2 / 3 \approx 0.67$$

Effekter av vägförbättringen

Om en väg förbättras så bör den väljas med högre sannolikhet än tidigare. Dock bör den inte alltid väljas, eftersom fienden i så fall kan utnyttja den informationen. Vi kan räkna ut hur mycket vägförbättringen betyder för oss i minskade förväntade förluster. Den förväntade förlusten minskade med ungefär 0.53 lastbil per förflyttning.

Vad säger taktikreglementet?

I *Arméreglemente del 2*, AR Taktik (1995),¹⁰ kan vi läsa:

Kraftsamlingens, överraskningens och handlingsfrihetens inbördes förhållanden kan inte rangordnas. Ibland är de samverkande, ibland motverkande... I strid måste vi ta risker. Chefen ska vara medveten om de risker som krävs för att lösa uppgiften.

Det aktuella exemplet inkluderar alla dessa delar.

Kraftsamling:

Vi behåller kompaniet kraftsamlat. Vi skulle i princip kunna dela kompaniet och låta delarna åka olika vägar. Då skulle vi antagligen drabbas av större förluster. Den analysen ryms dock inte i denna artikel.

Överraskning:

Det visade sig optimalt att välja väg på ett överraskande sätt.

Handlingsfrihet:

Det är optimalt att behålla bägge alternativen, väg 1 och väg 2, så länge som möjligt.

I. Vägval vid uppmarsch och underhållstransporter

Nu ska vi få fördjupad förståelse för principerna bakom de resultat som vi fann i det konkreta inledande exemplet.

Vi låter y_1 och y_2 beteckna sannolikheterna för att Blå väljer väg B1 respektive B2.

Vi låter x_1 och x_2 beteckna sannolikheterna för att Röd väljer eldöverfallsplats A1 respektive A2.

Om Blå väljer väg B1 och Röd väljer eldöverfallsplats A1 så blir den förväntade förlusten för Blå C_{11} . (Om Röd väljer eldöverfallsplats A2 blir det inga förluster för Blå.)

Om Blå väljer väg B2 och Röd väljer eldöverfallsplats A2 så blir den förväntade förlusten för Blå C_{22} . (Om Röd väljer eldöverfallsplats A1 blir det inga förluster för Blå.)

Vi ska behandla problematiken så generellt som möjligt. I några exempel nedan låter vi dock $C_{11} = 2$ och $C_{22} = 1$.

Det generella problem som Blå har kan uttryckas således: Blå vill minimera den förväntade förlusten, vilken kallas E , genom att välja sannolikheterna för att välja olika vägar, y_1 och y_2 . Blå vet att Röd kan välja att förbereda eldöverfallsplats vid vilken väg som helst, A1 eller A2. Därför är det ofrånkomligt att E är minst lika med $c_{11} y_1$ samt att E är minst lika med $c_{22} y_2$. Vi får också se till att $y_1 + y_2 = 1$ eftersom en av vägarne måste väljas. Vi kan av naturliga skäl inte heller välja negativa sannolikheter. Därför måste $0 \leq y_1$ och $0 \leq y_2$.

$\min E$

s.t.

$$E \geq c_{11} y_1 + 0 y_2 \quad (\text{if } A_1)$$

$$E \geq 0 y_1 + c_{22} y_2 \quad (\text{if } A_2)$$

$$1 = y_1 + y_2$$

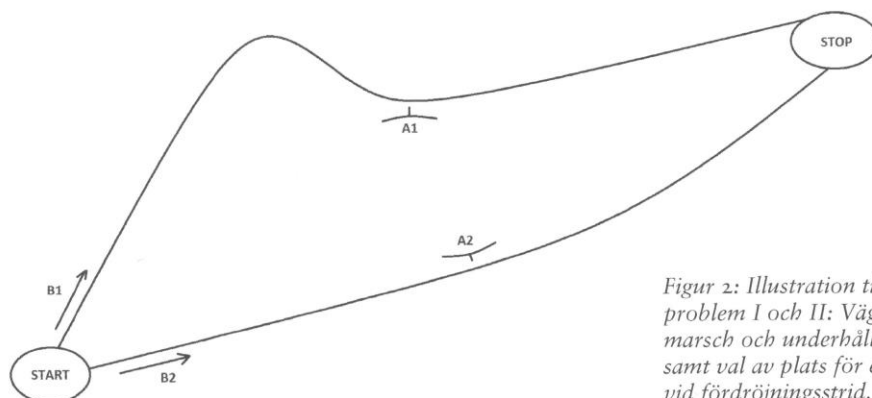
$$0 \leq y_1$$

$$0 \leq y_2$$

Eftersom sannolikhaternas summa alltid är ett så kan vi skriva:

$$y_2 = 1 - y_1$$

Vi får då följande förenklade problem:



Figur 2: Illustration till beslutsproblem I och II: Vägval vid uppmarsch och underhållstransporter samt val av plats för eldöverfall vid fördröjningsstrid.

$$\begin{aligned}
 &\min E \\
 &s.t. \\
 &\quad E \geq c_{11} y_1 \quad (\text{if } A_1) \\
 &\quad E \geq c_{22} (1 - y_1) \quad (\text{if } A_2)
 \end{aligned}$$

Detta kan skrivas om så här:

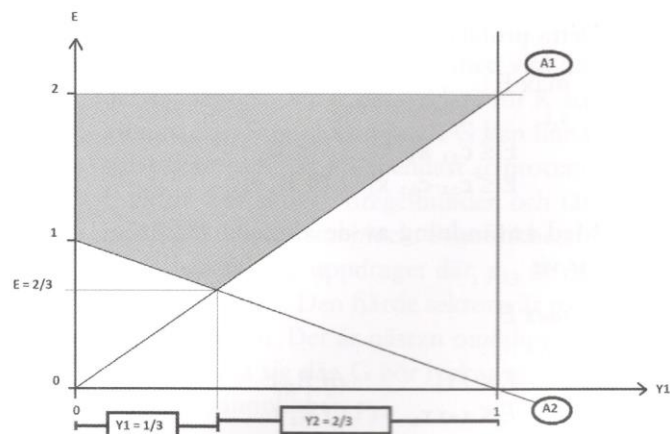
$$\begin{aligned}
 &\min E \\
 &s.t. \\
 &\quad E \geq c_{11} y_1 \quad (\text{if } A_1) \\
 &\quad E \geq c_{22} - c_{22} y_1 \quad (\text{if } A_2)
 \end{aligned}$$

Om vi nu använder de konkreta siffrorna i exemplet så får vi följande problem:

$$\begin{aligned}
 &\min E \\
 &s.t. \\
 &\quad E \geq 2y_1 \quad (\text{if } A_1) \\
 &\quad E \geq 1 - y_1 \quad (\text{if } A_2)
 \end{aligned}$$

Figur 3. Relevant metod för val av väg i exemplet:

Lägg en vit och två svarta kulor i en burk. Skaka burken och plocka upp en av kulorna utan att se dem. Om en vit kula valts så ska väg B₁ väljas. Om en svart kula valts ska väg B₂ väljas.



II. Val av plats för eldöverfall vid fördröjningsstrid

Vi använder nu samma beteckningar som i det första exemplet, "Vägval vid uppmarsch och underhållstransporter". Nu är vi emellertid inte Blå utan Röd. Vi vill därför inte minimera den förväntade förlusten utan maximera densamma.

Det generella problem som Röd har kan uttryckas således: Röd vill maximera den

Vi kan nu rita följande figur. Den förväntade förlusten E är nu en funktion av y_1 , sannolikheten att Blå väljer väg B₁. Eftersom Röd kan välja att förbereda eldöverfall till såväl platsen A₁ som till A₂ så begränsas det lägsta möjliga värdet av E av såväl A₁ som av A₂. Den lägsta möjliga nivån på den förväntade förlusten som Blå kan uppnå illustreras av den lägsta punkten på den grå ytan. Den lägsta möjliga förväntade förlusten är $2/3$. Blå finner att den optimala sannolikheten för att välja väg B₁ är $1/3$. Eftersom summa sannolikhet är lika med ett så bör väg B₂ väljas med sannolikheten $2/3$.

förväntade förlusten, vilken kallas E , genom att välja sannolikheterna x_1 och x_2 för att välja olika platser för eldöverfall. Röd vet att Blå kan välja att köra vilken väg som helst B₁ eller B₂. Därför är det ofrånkomligt att E inte kan överstiga $c_{11}x_1$ samt att E inte kan överstiga $c_{22}x_2$. Vi måste också se till att $x_1 + x_2 = 1$ eftersom vi måste välja någon av eldöverfallsplatserna varje gång. Vi kan av naturliga skäl inte heller välja negativa sannolikheter. Därför gäller att $0 \leq x_1$ och $0 \leq x_2$.

$$\begin{aligned}
 &\max E \\
 &\text{s.t.} \\
 &\quad E \leq c_{11}x_1 + c_{12}x_2 \quad (\text{if } B_1) \\
 &\quad E \leq c_{21}x_1 + c_{22}x_2 \quad (\text{if } B_2) \\
 &\quad x_1 + x_2 = 1 \\
 &\quad 0 \leq x_1 \\
 &\quad 0 \leq x_2
 \end{aligned}$$

Eftersom summa sannolikhet alltid är ett så följer att:

$$x_2 = 1 - x_1$$

Vi får nu det förenklade problemet:

$$\begin{aligned}
 &\max E \\
 &\text{s.t.} \\
 &\quad E \leq c_{11}x_1 \quad (\text{if } B_1) \\
 &\quad E \leq c_{22}(1 - x_1) \quad (\text{if } B_2)
 \end{aligned}$$

Detta problem kan förenklas ytterligare:

$$\begin{aligned}
 &\max E \\
 &\text{s.t.} \\
 &\quad E \leq c_{11}x_1 \quad (\text{if } B_1) \\
 &\quad E \leq c_{22} - c_{22}x_1 \quad (\text{if } B_2)
 \end{aligned}$$

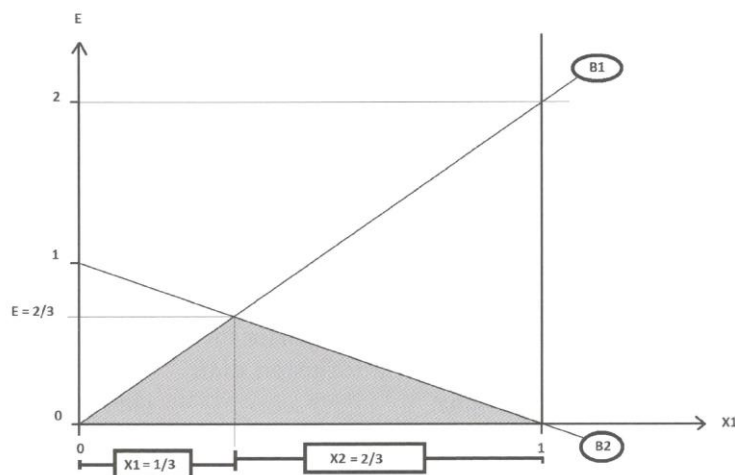
Med användning av de aktuella siffrorna får vi:

$$\begin{aligned}
 &\max E \\
 &\text{s.t.} \\
 &\quad E \leq 2x_1 \quad (\text{if } B_1) \\
 &\quad E \leq 1 - x_1 \quad (\text{if } B_2)
 \end{aligned}$$

Figur 4.

Relevant metod för val av eldöverfallsplats i exemplet:

Lägg en vit och två svarta kulor i en burk. Skaka burken och plocka upp en av kulorna utan att se dem. Om en vit kula valts så ska A₁ väljas. Om en svart kula valts ska A₂ väljas.

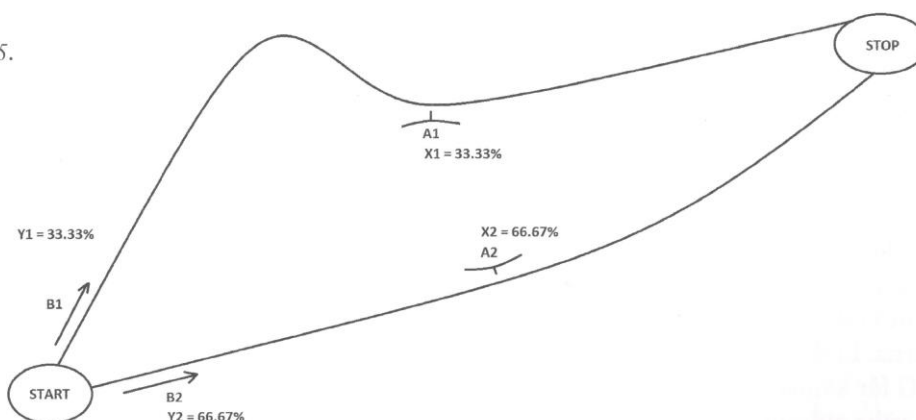


Vi kan nu rita följande figur. Den förväntade förlusten är nu en funktion av x_1 , sannolikheten att Röd väljer att förbereda eldöverfallsplats A₁. Eftersom Blå kan välja att köra valfri väg B₁ eller B₂, så begränsas det högsta möjliga värdet av såväl B₁ som B₂. Den högsta möjliga nivån på den förväntade förlusten som Röd kan uppnå illustreras av den högsta punkten på den grå ytan. Den högsta möjliga förväntade förlusten är 2/3. Röd finner att den optimala sannolikheten för att välja att förbereda eldöverfallsplats A₁ är 1/3. Eftersom summa sannolikhet är lika med ett så bör eldöverfallsplats A₂ väljas med sannolikheten 2/3.

En viktig observation är följande: Det lägsta möjliga värde på förlusten som Blå kunde uppnå är lika med det högsta möjliga värde som Röd kunde uppnå. Med den generella teorin för linjär programmering kan detta bevisas vara en generell giltig slutsats, oavsett vilka specifika siffror som användes. Den intresserade läsaren uppmuntras att ta del av denna. Se referenslistan.

I följande figur har de optimala sannolikheter som Blå och Röd bör välja inkluderats.

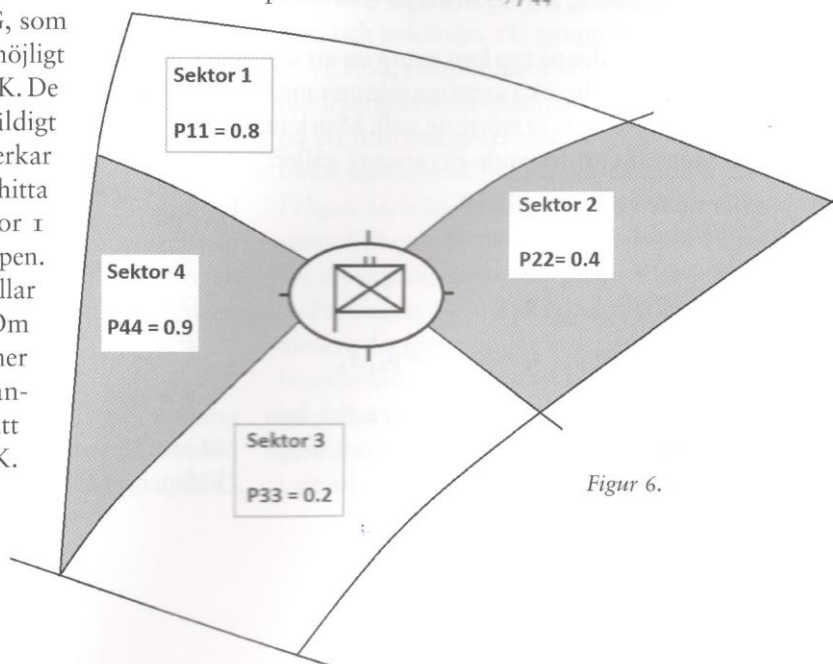
Figur 5.



III. Positionering av bevaknings- och stridspatruller vid stabsplats

Förutsättningar och läge: Blå har en bataljonstabsplats vilken omges av fyra sektorer, 1, 2, 3 och 4. Blå har underrättelser som indikerar att Röd har sänt ut en fientlig spanings- och sabotagegrupp, K, med uppgiften att spana mot och eventuellt störa verksamheten vid stabsplatsen. Blå disponerar en grupp, G, som kan sättas in för att om möjligt lokalisera och bekämpa K. De olika sektorerna har väldigt olika terräng, vilket påverkar sannolikheten att G kan hitta och bekämpa K. I sektor 1 är terrängen tämligen öppen. Skogen består av höga tallar utan undervegetation. Om G och K samtidigt befinner sig i den sektorn är sannolikheten, 80 procent att G hittar och bekämpar K.

Sektor 2 består av blandskog med viss undervegetation. Där är det enklare för K att gömma sig. Sannolikheten att G kan finna och bekämpa K där, p_{22} är endast 40 procent. I sektor 3 är skogen oregelbunden och tät och fylld av stora stenblock. Sannolikheten att G lyckas med uppdraget där, p_{33} är endast 20 procent. Den fjärde sektorn är nästan helt öppen. Det är nästan omöjligt för K att gömma sig där. G bör lyckas med 90 procents sannolikhet, p_{44} .



Figur 6.

Den totala tiden som G kan disponera för uppgiften är mycket begränsad. G hinner endast genomsöka en av sektorerna innan hela bataljonstaben ska omgrupperas.

Frågan är vilken av sektorerna som bör genomsökas. Givetvis vill Blå maximera det förväntade resultatet av insatsen. Röd vill minimera detta.

Problemet för Blå är därför att maximera det förväntade värdet av E , vilket nu betyder sannolikheten att G lyckas finna och bekämpa K. Blå måste välja sannolikheterna x_1, x_2, x_3, x_4 för att G ska kommenderas till de olika sektorerna. Endast kommendanten och chefen för G får känna till beslutet. Eftersom Röd kan välja att sända K till vilken sektor som helst, så begränsas E av de värden som E får om Röd väljer dessa alternativa sektorer; S_1, S_2, S_3, S_4 . Som alltid är den totala sannolikheten 1 och ingen enskild sannolikhet kan vara negativ.

$\max E$

s.t.

$$E \leq p_{11} x_1 \quad (\text{if } S_1)$$

$$E \leq p_{22} x_2 \quad (\text{if } S_2)$$

$$E \leq p_{33} x_3 \quad (\text{if } S_3)$$

$$E \leq p_{44} x_4 \quad (\text{if } S_4)$$

$$1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0$$

I problem av denna typ kan man visa att det är optimalt att besöka samtliga sektorer med sannolikheter som är större än noll. Man kan då även visa att följande ekvationer gäller:

$$E = p_{11} x_1$$

$$E = p_{22} x_2$$

$$E = p_{33} x_3$$

$$E = p_{44} x_4$$

$$E = p_{11} x_1 = p_{22} x_2 = p_{33} x_3 = p_{44} x_4$$

Om E är känd, vilket ännu inte är fallet, kan sannolikheterna bestämmas genom dessa ekvationer:

$$x_1 = E / p_{11}$$

$$x_2 = E / p_{22}$$

$$x_3 = E / p_{33}$$

$$x_4 = E / p_{44}$$

Redan nu, innan vi känner värdet E , ser vi i ekvationerna, att sannolikheten att vi bör besöka en viss sektor är omvänt proportionell mot sannolikheten att finna och bekämpa motståndaren i den sektorn, givet att motståndaren finns där. Sektorer med besvärliga siktförhållanden och svår terräng bör besökas med högre sannolikhet än sektorer med god sikt och lätt terräng.

Vi använder nu dessa sannolikhetsfunktioner i kombination med ekvationen som säger att summa sannolikhet är ett:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

Vi får då följande ekvation:

$$E / p_{11} + E / p_{22} + E / p_{33} + E / p_{44} = 1$$

Vi dividerar vänstra och högra ledet med E :

$$1 / p_{11} + 1 / p_{22} + 1 / p_{33} + 1 / p_{44} = 1 / E$$

Vi kan skriva om ekvationen så här:

$$(p_{22} p_{33} p_{44} + p_{11} p_{33} p_{44} + p_{11} p_{22} p_{44} + p_{11} p_{22} p_{33}) / (p_{11} p_{22} p_{33} p_{44}) = 1 / E$$

Om vi använder våra kända sannolikheter $p_{11}, p_{22}, p_{33}, p_{44}$ i ekvationen får vi följande:

$$(0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2) / (0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9) = 1 / E$$

Nu kan vi enkelt räkna ut det optimala värdet på E :

$$E = (0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9) / (0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2)$$

$$E \approx 0.10140845$$

$$E \approx 10\%$$

Med andra ord är den högsta möjliga sannolikheten att G lyckas lokalisera och bekämpa

K ca 10 %. När vi nu vet detta så kan vi även enkelt räkna ut med vilka sannolikheter Blå bör skicka G till de olika sektorerna:

$$x_1 = E/p_{11} = E/0.8 \approx 12.68\%$$

$$x_2 = E/p_{22} = E/0.4 \approx 25.35\%$$

$$x_3 = E/p_{33} = E/0.2 \approx 50.70\%$$

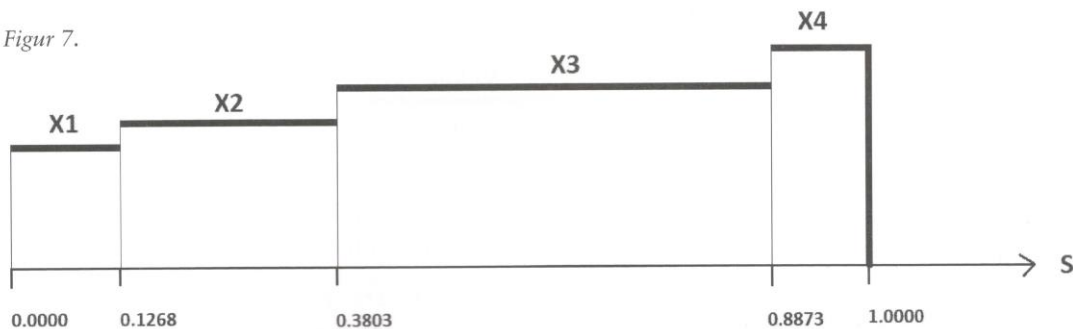
$$x_4 = E/p_{44} = E/0.9 \approx 11.27\%$$

Vi noterar att G med högst sannolikhet bör skickas till den sektor som har mest besvärlig terräng. Alla sektorer bör dock besökas med sannolikheter som är större än noll.

Relevant metod för beslut om till vilken sektor grupp G ska skickas:

Konstruera först, med hjälp av x_1, x_2, x_3, x_4 följande figur:

Figur 7.



Dra därefter ett slumpstal, Z. (Z ska vara likformigt fördelat, mellan 0 och 1. Många moderna kalkylatorer kan enkelt generera "kvasi-slumpstal" som motsvarar Z.)

Om Z ligger mellan 0 och 0,1268; skicka G till Sektor 1.

Om Z ligger mellan 0,1268 och 0,3803; skicka G till Sektor 2.

Om Z ligger mellan 0,3803 och 0,8873; skicka G till Sektor 3.

Om Z ligger mellan 0,8873 och 1,000; skicka G till Sektor 4.

IV. Val av utgångsgruppering för spaning mot, och störande av, fientlig stabsplats

Förutsättningar och läge i detta exempel motsvarar i hög grad situationen i beslutsproblem III. En bataljonstab är lokaliserad i samma omgivning som i beslutsproblem III. Nu ska vi emellertid se på situationen från Röds perspektiv. Bataljonstabsplatsen hör till vår fiende, Blå.

Vi, Röd, ska sända ut en spanings- och sabotagegrupp, K, med uppgiften att spana mot och eventuellt störa verksamheten vid stabsplatsen. Blå disponerar en grupp, G,

som kan sättas in för att om möjligt lokalisera och bekämpa vår grupp K.

Vi, Röd, vill minimera sannolikheten att K blir upptäckt och bekämpad. Vi vill uppträda på ett oförutsägbart sätt, d.v.s. utnyttja de olika sektorerna med olika sannolikheter. Frågan är, från Röds perspektiv, med vilka sannolikheter de olika sektorerna bör väljas för att utgångsgruppera grupp K.

Problemet för oss, Röd, är därför att minimera det förväntade värdet av E, vilket nu betyder sannolikheten att G lyckas finna och bekämpa K. Röd måste välja sannolikheterna y_1, y_2, y_3, y_4 för att K ska utgångsgrupperas i de olika sektorerna. Endast Chefen för

Röd och chefen för K får känna till beslutet. Eftersom Blå kan välja att sända G till vilken sektor som helst, så begränsas E av de värden som E får om Blå väljer dessa alternativa sektorer; s_1, s_2, s_3, s_4 . Som alltid är den totala sannolikheten 1 och ingen enskild sannolikhet kan vara negativ.

$\min E$

s.t.

$$E \geq p_{11} y_1 \quad (\text{if } S_1)$$

$$E \geq p_{22} y_2 \quad (\text{if } S_2)$$

$$E \geq p_{33} y_3 \quad (\text{if } S_3)$$

$$E \geq p_{44} y_4 \quad (\text{if } S_4)$$

$$1 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0; y_4 \geq 0$$

I problem av denna typ kan man visa att det är optimalt att besöka samtliga sektorer med sannolikheter som är större än noll. Man kan då även visa att följande ekvationer gäller:

$$E = p_{11} y_1$$

$$E = p_{22} y_2$$

$$E = p_{33} y_3$$

$$E = p_{44} y_4$$

$$E = p_{11} y_1 = p_{22} y_2 = p_{33} y_3 = p_{44} y_4$$

Om E är känd, vilket ännu inte är fallet, kan sannolikheterna bestämmas genom dessa ekvationer:

$$y_1 = E/p_{11}$$

$$y_2 = E/p_{22}$$

$$y_3 = E/p_{33}$$

$$y_4 = E/p_{44}$$

Redan nu, innan vi känner värdet E , ser vi i ekvationerna, att sannolikheten att vi bör utgångsgruppera i en viss sektor är omvänt proportionell mot sannolikheten att vi blir funna och bekämpade i den sektorn, givet att motståndaren finns där. Sektorer med besvärliga siktförhållanden och svår terräng bör användas med högre sannolikhet än sektorer med god sikt och lätt terräng.

Vi använder nu dessa sannolikhetsfunktioner i kombination med ekvationen som säger att summa sannolikhet är ett:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$$

Vi får då följande ekvation:

$$E/p_{11} + E/p_{22} + E/p_{33} + E/p_{44} = 1$$

Vi dividerar vänstra och högra ledet med E :

$$1/p_{11} + 1/p_{22} + 1/p_{33} + 1/p_{44} = 1/E$$

Vi kan skriva om ekvationen så här:

$$(p_{22} p_{33} p_{44} + p_{11} p_{33} p_{44} + p_{11} p_{22} p_{44} + p_{11} p_{22} p_{33}) / (p_{11} p_{22} p_{33} p_{44}) = 1/E$$

Med användning av de aktuella sannolikheterna får vi följande:

$$(0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2) / (0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9) = 1/E$$

E kan nu enkelt bestämmas:

$$E = (0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9) / (0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2)$$

$$E \approx 0.10140845$$

$$E \approx 10\%$$

Vi finner att E , det lägsta möjliga värde som Röd kan uppnå, är lika med det högsta möjliga värde som Blå kan uppnå. Jämför beslutsproblem III. Denna likhet kan också, med hjälp av den generella teorin för lineär programmering, visas vara ett generellt giltigt resultat som inte är beroende av att just de aktuella siffrorna i exemplet användes. Med hjälp av det beräknade värdet på E kan nu samtliga sannolikheter beräknas:

$$y_1 = E/p_{11} = E/0.8 \approx 12.68\%$$

$$y_2 = E/p_{22} = E/0.4 \approx 25.35\%$$

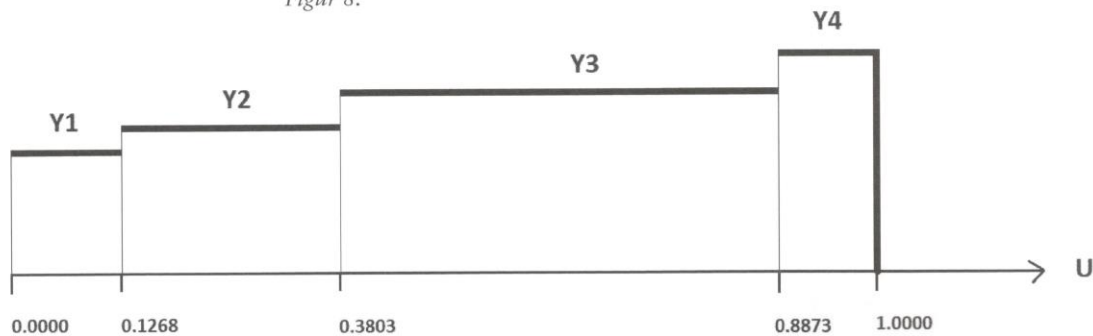
$$y_3 = E/p_{33} = E/0.2 \approx 50.70\%$$

$$y_4 = E/p_{44} = E/0.9 \approx 11.27\%$$

Vi finner också att beslutsproblemen III och IV är symmetriska i den meningen att de optimala sannolikheterna för Blå och Röd att använda de olika sektorerna är desamma.

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 \\y_2 &= x_2 \\y_3 &= x_3 \\y_4 &= x_4\end{aligned}$$

Figur 8.



Dra därefter ett slumpstal, Z . (Z ska vara likformigt fördelat, mellan 0 och 1. Många moderna kalkylatorer kan enkelt generera "kvasi-slumpstal" som motsvarar Z .)

Om Z ligger mellan 0 och 0,1268; skicka K till sektor 1.

Relevant metod för beslut gällande i vilken sektor som K bör utgångsgrupperas:

Konstruera först, med hjälp av y_1, y_2, y_3, y_4 följande figur:

Om Z ligger mellan 0,1268 och 0,3803; skicka K till sektor 2.

Om Z ligger mellan 0,3803 och 0,8873; skicka K till sektor 3.

Om Z ligger mellan 0,8873 och 1,000; skicka K till sektor 4.

Kontrollmetod

När vi nu har räknat ut de sannolikheter som Blå och Röd bör välja, kan vi också undersöka om allt hänger ihop på ett logiskt sätt.

Sannolikheterna för de alternativa beslut som Blå och Röd har fastställt är som visats kopplade till det förväntade värdet E .

Nu kan vi, med hjälp av de beräknade sannolikheterna, kontrollera om vi återigen kan få fram värdet E .

Vi vet att de beslut som Blå och Röd tar är oberoende av varandra. Därför kan vi

beräkna det förväntade värdet av E på följande sätt:

$$E = x_1 y_1 p_{11} + x_2 y_2 p_{22} + x_3 y_3 p_{33} + x_4 y_4 p_{44}$$

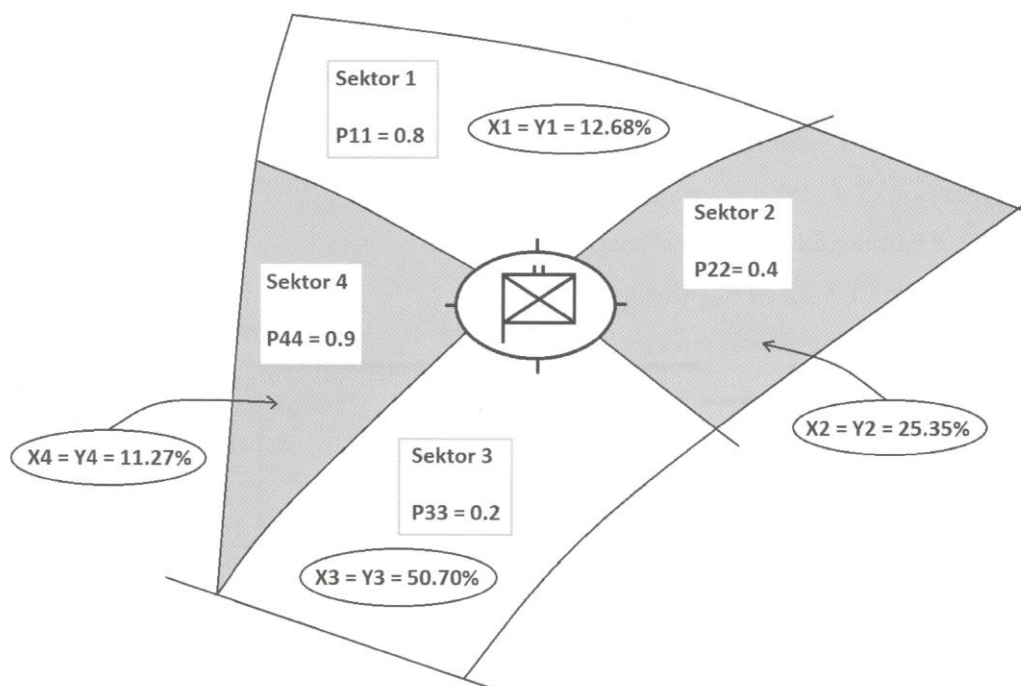
När vi gör så och använder de beräknade sannolikheterna, får vi fram samma resultat:

$$E \approx 0.10140845$$

Efter denna kontroll kan vi vara övertygade om att vi har räknat rätt.

I följande figur har sannolikheterna för Blå och Röd att befinnas sig i de olika sektorerna lagts in.

Figur 9.



Diskussion

Praktiskt taget alla militära beslutsproblem kan och bör lösas med hjälp av spelteori. Om vi inte gör det så får vi räkna med onödigt stora förluster och sämre resultat än nödvändigt. Viktiga exempel på sådana problem är dessa: Hur bör vi utnyttja befintliga förband och andra resurser för att försvara olika objekt? Hur bör vi välja anfallsmål? Hur bör vi välja tidpunkter för olika åtgärder? Hur bör vi söka igenom ett område där det kan finnas terrorister eller fientliga förband med begränsade resurser?

Denna text har omfattat fyra typer av beslutsproblem. Dessa problem kan lösas med hjälp av papper och penna samt kulator och fickräknare, utrustning som man enkelt kan medföra i alla typer av förband, på alla nivåer. Inga speciella förkunskaper,

förutom de fyra räknesätten, är nödvändiga. De teorier och metoder som denna text har beskrivit bör därför införas som obligatorisk del i svensk militär befälsutbildning, avsedd för befattningar som plutonchef eller högre. I andra typer av beslutsproblem måste mer omfattande beräkningar göras. På staber i högre förband bör detta inte vara något praktiskt problem. Författaren hoppas på framtida tillfällen att redogöra för sådana situationer och typiska optimala lösningar i lämplig form.

Författaren är professor och arbetar i det egna företaget Optimal Solutions i samverkan med Linneuniversitetet. Han var perioden 2000–2015 professor i företagsekonomi vid skogsfakulteten, SLU.

Noter

1. Washburn, Alan R: *Two-person zero-sum games*, Institute for Operations Research and the Management Sciences, 2 utgåvan, Linthicum, Maryland, USA 1994.
2. Luce, Robert Duncan och Raiffa, Howard: *Games and decisions*, Dover, Mineola, New York, USA 1989.
3. Nash, John Forbes: "Equilibrium points in n-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, USA 1950, s 48-49.
4. von Neumann, John: "A numerical method to determine optimum strategy", *Naval Research Logistics Quarterly*, 1, USA 1954.
5. Dresher, Melvin: *Games of Strategy, Theory and Application*, RAND Corporation, Santa Monica, California, USA 1961.
6. Chiang, Alpha Chung-i: *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 2 utgåvan, McGraw-Hill, Tokyo, Japan 1974.
7. Isaacs, Rufus: *Differential Games, A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*, Wiley, Mineola, New York 1965.
8. Braun, Martin: *Differential equations and their applications*, Applied mathematical sciences 15, Springer-Verlag, 3 utgåvan, New York 1983.
9. Lohmander, Peter: "Applications and Mathematical Modeling in Operations Research", i Cao, Bing-Yuan (red): *Fuzzy Information and Engineering and Decision, Advances in Intelligent Systems and Computing*, Springer International Publishing AG, Cham, Switzerland, 2018, s 46-53.
10. *Armereglemente del 2 Taktik*, Försvarsmakten, Stockholm, Sverige, M7741-100612, 1995.